http://math-sci.ui.ac.ir

Journal of Mathematics and Society
ISSN (print): 2345-6493, ISSN (on-line): 2345-6507
Vol. 9 No. 1 (2024), pp. 77-89.

http://www.ui.ac.ir

AN INVESTIGATION OF KURATOWSKIS DEFINITION OF AN ORDERED PAIR

ALI MOLKHASI* AND MAHSA EZZATI

Abstract. In this paper, we study the definitions of ordered pair from the point of view of Kuratowski, Wiener, Hausdorff and Morse. We first present the possible definitions of an ordered pair, and then examine the structure of the Cartesian product of sets, relations, and functions. This paper can be useful for mathematical researchers in creating new insight and better understanding of the concept of ordered pair and its related mathematical concepts, such as ordered and unordered Cartesian product, relation and function, etc.

1. Introduction

The aim of this paper is the study of the ordered pair, especially the examination of the possible definitions for the ordered pair. Every theory in mathematics has axioms, definitions, symbols and theorems. In the theory of sets, the ordered pair is considered as a definition. This concept also has a natural meaning in the physical world. In 1914, Wiener gave the first simple definition of an ordered pair. Later, Kazimierz Koratowski in 1921 suggested a simpler definition of ordered pair than Wiener in set theory, so that relation and function were easily defined. Zermelo's axioms of set theory of 1908 provide a theory which can found all of classical mathematics. The paper is organized as follows.

Keywords: Kuratowski's Definition of an Ordered Pair, Cartesian produc.

Article Type: Promotional Paper.

Communicated by Mohamad Reza Pouryayevali.

*Corresponding author.

Received: 22-04-2023, Accepted: 27-01-2024, Published Online: 27-05-2024.

Cite this article: A. Molkhasi and M. Ezzati, An investigation of kuratowski's definition of an ordered pair, *Journal of Mathematics and Society*, **9** no. 1 (2024) 77–89.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.137454.1571 .

In section 1, we collect the basics concepts and present the history of the ordered pair. In section 2, we provide a short summary of the first-order structure and logic concepts. We recall that the language desired in this paper is the relation language. In section 3, we study some of the cases of the definition of ordered pair. In section 4, we discuss possible definitions for the ordered pair that it is not satisfiable in formula $(a,b)=(c,d) \Longleftrightarrow a=c,\ b=d$. The end section some results are set out.

2. Main Results

The obvious approach is to translate or codify naive set theory into a formal first order theory. By a language we mean a mapping σ, the domain of which is any set and the range of which is a set of integers. By a σ-symbol we mean an element of the domain of σ. A σ-symbol s is said to be an operation symbol if $\sigma(s) \geq 0$; it is said to be a relation symbol if $\sigma(s) < 0$. A first-order language is a set

$$\mathcal{L} = \mathcal{F} \dot{\bigcup} \mathcal{R}$$

where

$$\mathcal{F} = \dot{\bigcup_{n\geqslant 0}} \mathcal{F}_n, \quad \mathcal{R} = \dot{\bigcup_{n\geqslant 1}} \mathcal{R}_n.$$

Notice that objects $\mathcal{F}_n$ operation symbols n-ary and objects $\mathcal{R}_n$ relation symbols n-ary and objects $\mathcal{F}_0$ constant symbols are said. The language is called algebraic language if $\mathcal{R} = \emptyset$. Also, the language is called relational language if $\mathcal{F} = \emptyset$. By a relation n-ary relation on a set A we mean a subset of A^n. We denote by

$$A = (A, f^A, R^A, f \in \mathcal{F}, R \in \mathcal{R}) \qquad .$$

Note that the standard logical symbols of a formal first order (relation) language, namely, are

$$\neg, \quad \exists, \quad \neg \quad \vee, \quad =, \quad (,)$$

Here, in this paper, we introduce a new function symbol of arity 2 , J, by

$$J(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$$

It is customary to denote the term $J(x,y)$ by (x,y).

2.1. **Definition Unordered Cartesian Products of Arbitrary Family of Sets and Unordered $\triangle$-tuples:** Suppose $A = \{A_x \,|\, x \in \triangle\}$ is a family of sets. We define the unordered Cartesian product $\prod_{x\in\triangle} A_x = \prod\{A_x \,|\, x \in \triangle\}$ as the set of all functions

$$f : \triangle \longrightarrow \cup_{x\in\triangle} A_x$$

satisfying $f(x) \in A_x$ for each x in $\triangle$.

 http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.137454.1571

2.2. **Definition Ordered Cartesian Products of Arbitrary Families of Sets:** Suppose $A = \{A_x \mid x \in \triangle\}$ is a family of sets and $(\triangle, \leq)$ is partially order set. We define the ordered Cartesian product $(\prod_{x\in\triangle} A_x, \leq) = \prod\{A_x \mid x \in \triangle\}$ as the set of all functions $f : \triangle \longrightarrow \cup_{x\in\triangle} A_x$ satisfying $f(x) \in A_x$ for each x in $\triangle$.

Recall that many Mathematicians tried to define ordered pair. We are ready to list theorms that we proved:

Theorem 2.1. $(a, b) = \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\}$ *if and only if* $(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow a = c,\ b = d$

Theorem 2.2. $(a, b) = \{\{a, \emptyset\}, \{b, \{\emptyset\}\}\}$ *if and only if* .$((a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow a = c,\ b = d)$

Theorem 2.3. $(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$ *if and only if* .$(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow (a = c,\ b = d)$

Theorem 2.4. $(a, b) = \{\{a\}, \{\{a\}, b\}\}$ *if and only if* .$(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow (a = c,\ b = d)$

It is not hard to show that the following definitions for the ordered pair are not satisfiable formulas:

$$(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow a = c,\ b = d$$

-$(a, b) = \{\{b\}, \{a, b\}\}$
-$(a, b) = \{\{a, b\}\}$
-$(a, b) = \{a, b\}$
-$(a, b) = \{a\}$
-$(a, b) = \{b\}$

3. Conclusions

We conclude that the Kuratowski's definition of the ordered pair is consistent with finding coordinates in Euclidean spaces and other space coordinates.

References

[1] J. Bet Daoud, *Fundamentals of mathematics*, translation: Mohammad Mahdi Ebrahimi, 18, Payam Noor Publishing House, 2007. [In Persian]

[2] G. H. Musaheb, *Mathematical analysis*, **6**, Amir Kabir Publications, 1991. [In Persian]

[3] M. A. Khatami, About the principle of choice, *Journal of Mathematics and Society*, **7** no. 3 (2022) 103–125. [In Persian]

[4] V. Serpinski, *Set theory*, translation: Parviz Shahriari, Kharazmi Publications, 1978. [In Persian]

[5] K. Kuratowski and R. Engelking, *An introduction to set theory and topology*, translation: Majid Ashrafi, Sina Malvani, Mohammad Ali Ghirtamand, Shabahang Publications, 2018. [In Persian]

[6] A. Stewart and D. Tal, *Fundamentals of Mathematics*, translation: Mohammad Mahdi Ebrahimi, Academic Publishing Center, 2015. [In Persian]

[7] P. R. Aczel, *Generalised set theory, logic, language and computation*, **1** (Moraga, CA, 1994), CSLI Lecture Notes, CSLI Publ., Stanford, CA, 1996 1–17.

[8] R. R. Dipert, Set-theoretical representations of ordered pairs and their adequacy for the logic of relations, *Canadian Journal of Philosophy*, **12** no. 2 (1982) pp. 22.

[9] N. Delfan, A. Pishkoo, M. Azhini and M. Darus, Using fractal calculus to express electric potential and electric field in terms of staircase and characteristic functions, *Eur. J. Pure Appl. Math.*, **13** no. 1 (2022) 19–32.

[10] K. Falconer, *Techniques in fractal geometry*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1997.

[11] G. Frege, Grundgesetze der arithmetik, *Jena: Verlag Hermann Pohle*, 1893.

[12] T, George, *Lectures in logic and set theory*, **2**, Set Theory, Cambridge Univ. Press. Proposition, 2003.

[13] C. P. Haynes and A. D. Roberts, Generalization of the fractal Einstein law relating conduction and diffusion on networks, *Phys. Rev. Lett.*, **103** (2009).

[14] P. R. Halmos, *Natural theory of collections*, translation: Abdolhamid Dadaleh, Academic Publishing Center, 1980.

[15] M. R. Holmes, *On ordered Pairs*, math. boisestate, Princeton University Press, 1988.

[16] J. Ferreiros, *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics*, Birkhäuser Basel, 1999 pp. 440.

[17] K. Devlin, *Sets, functions and logic, an Introduction to abstract mathematics*, (3rd ed.), Chapman & Hall/CRC Mathematics, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.

[18] A. Kanamori, The mathematical import of Zermelo's Well-Ordering theorem, *Bull. Symbolic Logic*, **3** (1997) 281–311.

[19] A. Kanamori, The empty set, the singleton, and the ordered pair, *Bull. Symbolic Logic*, **9** (2003) 273–298.

[20] S.-Y. T. Lin, *Set theory and its applications*, University Publishing Center, 1981.

[21] J. Madhusudana Rao, Products of sets: Ordered and unordered, *Resonance*, **21** (2016) 557–564.

[22] A. P. Morse, *A theory of sets* Pure and Applied Mathematics, **XVIII**, Academic Press, New York-London, 1965.

[23] B. Oyer, *A history of mathematics (2nd ed.)*, New York: Wiley, 1991.

[24] W. V. Quine, *The time of my life: an autobiography*, CAMBRIDGE, MA, 1985 p. 499.

[25] M. R. Holmes, *Elementary set theory with a universal set*, Université Catholique de Louvain, Département de Philosophie, Louvain-la-Neuve, 1998.

[26] D. Scott and D. Mccarty, Reconsidering ordered pairs, *Bull. Symbolic Logic*, **14** (2008) no. 3 379–397.

[27] S. Satin and A. D. Gangal, Langevin equation on fractal curves, *Fractals*, **24** (2016) 7 pp.

[28] J. B. Rosser, *Logic for mathematicians*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1953.

[29] Wikipedia, Zermelo–Fraenkel set theory, (2021).

Ali Molkhasi

Department of Mathematics, Farhamgian University, Tehran, Iran

Email: molkhasi@gmail.con

Mahsa Ezzati

Department of Mathematics, Farhangian University, Tehran, Iran

Email: mahsaezati313@gmail.com

 http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.137454.1571

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۹، شماره ۱ (۱۴۰۳)، صص. ۷۷-۸۹

http://math-sci.ui.ac.ir
http://www.ui.ac.ir

بررسی تعریف زوج مرتب کوراتوفسکی

علی ملخاصی* و مهسا عزتی

چکیده. در این مقاله، تعریف زوج مرتب از دیدگاه کوراتوفسکی، وینر، هاسدورف و مورس را بررسی می‌کنیم. در ادامه حالت‌های ممکن تعریف زوج مرتب را بیان نموده و در حالت‌های متناظر این تعریف‌ها ساختار حاصلضرب دکارتی مجموعه‌ها، روابط و توابع را بررسی می‌کنیم. مقاله حاضر می‌تواند در ایجاد بینش جدید و درک بهتر مفهوم زوج مرتب و مفاهیم ریاضی وابسته به آن، از جمله حاصلضرب دکارتی مرتب و نامرتب، رابطه و تابع و غیره، برای پژوهشگران ریاضی مفید واقع شود.

۱. مقدمه

موضوع این مقاله مطالعه‌ی زوج مرتب به‌خصوص بررسی تعریف‌های ممکن برای زوج مرتب است. در بسیاری از علوم با تعریف اشیاء جدید، بعضی از جزئیات برای مدت زمانی ممکن است مغفول بمانند. برای مثال زمانی‌که نظریه‌ی نوین مجموعه‌ها، که شامل تعریفی برای مفهوم مجموعه نامتناهی بود، معرفی شد؛ شاید بتوان گفت برای اولین‌بار بشر مصداقی غیر ماورائی برای نامتناهی بالفعل در ذهن خویش یافته بود. البته بخش بزرگی از ادبیات ریاضی، مبتنی بر نظریه‌ی مجموعه‌ها است و به‌طور صریح یا ضمنی، مستقیم یا غیرمستقیم در مفاهیم ریاضی نمود پیدا می‌کند که برای اطلاعات بیشتر می‌توان به [۳] مراجعه کرد. هر نظریه‌ای در ریاضیات دارای اصول، تعاریف، قراردادها و قضایاست. در نظریه‌ی مجموعه‌ها نیز زوج مرتب به‌عنوان تعریف در نظر گرفته شده است. این مفهوم در دنیای فیزیکی نیز دارای معنای طبیعی است. زوج مرتب برای اولین‌بار توسط نوربرت وینر[۱] در سال ۱۹۱۴ تعریف شد. بعداً کازیمیرز کوراتوفسکی[۲] ریاضیدان لهستانی، در سال ۱۹۲۱ تعریفی ساده‌تر از زوج مرتب نسبت به وینر را در نظریه‌ی مجموعه‌ها ارائه کرد به طوری‌که با استفاده از آن رابطه و تابع به‌راحتی تعریف شد. زرملو[۳] در مقاله خود در سال ۱۹۰۸ بدون استفاده از تعریف زوج مرتب، با ارائه‌ی یک دستگاه اصل موضوعی برای نظریه‌ی مجموعه‌ها علاوه بر جوابگویی به پارادوکس‌هایی نظیر پارادوکس راسل[۴]، بسیاری از تناقض‌ها را یا ثابت کرد و یا به سؤالاتی حل نشده تقلیل داد [۲۵]. شاید بتوان گفت به مرور زمان و کم‌کم با کامل‌تر شدن دستگاه اصل موضوعی نظریه‌ی مجموعه‌ها، بیشتر ابهامات حل شد. لازم به توضیح است که هر چند که نظریه‌ی مجموعه‌ها بعد از نظریه‌های زیادی در ریاضیات مطرح شده، ولی به دلیل اهمیت و پایه‌ای بودن، این نظریه توانست جایگاه خود را در مقایسه با سایر نظریه‌های

عبارات و کلمات کلیدي: زوج مرتب کوارتوفسکی، حاصلضرب دکارتی.
دبیرتخصصی رابط: محمدرضا پوریای‌ولی
نوع مقاله: ترویجی
*نویسنده مسئول
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۲/۰۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۰۷ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۳/۰۳/۰۷
ارجاع به مقاله: ع. ملخاصی و م. عزتی، بررسی تعریف زوج مرتب کوراتوفسکی، ریاضی و جامعه، **جلد ۹** شماره ۱ (۱۴۰۳) ۷۷-۸۹.
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.137454.1571 .

[1]Norbert Wiener [2]Kuratowski [3]Zermelo [4]Russell

ریاضی ارتقا دهد. یکی از هدف‌های پژوهشگران ریاضی این است که اصول و قضایا و تعاریف و قراردادهای مهم در ریاضیات را با نظریه‌ی مجموعه‌ها سازگار کنند، تا این حد که امروزه بسیاری از مفاهیم ریاضی از جمله تعاریف و قراردادها و قضایای مربوطه را می‌توان دقیقاً با استفاده از نظریه‌ی مجموعه‌ها و اصول آن، مورد بررسی قرار داد و بعلاوه آن‌را به‌عنوان ابزاری قدرتمند در استدلال استنتاجی شاخه‌های متعدد ریاضی به حساب آورد. نظریه‌ی طبیعی مجموعه‌ها[۵] اولین پیشرفت و گسترش نظریه مجموعه‌ها محسوب می‌شود که بر پایه درکی غیررسمی و بی‌قاعده از مفهوم مجموعه به‌عنوان گردایه‌ای از اشیا استوار است، هرچند که در ابتدا، نظریه طبیعی مجموعه‌ها با پارادوکس‌های بسیاری از جمله پارادوکس معروف راسل مواجه بود. در نظریه‌ی طبیعی مجموعه‌ها، مجموعه به معنی گردایه‌ای از اشیاء مشخص است؛ در حالی‌که در نظریه مجموعه‌ها، مجموعه یکی از مفاهیم بنیادی و تعریف نشده‌ی ریاضی است و به وسیله‌ی آن، سایر مفاهیم از جمله عضویت، زیرمجموعه و تساوی دو مجموعه و روابط و عملگرهای ریاضی متناظر تعریف می‌شوند و در نهایت با یک سری اصول، نظریه مجموعه‌ها تشکیل می‌شود. نظریه‌ی مجموعه‌ها شاخه‌ای از منطق ریاضی است که توسط گئورگ کانتور در سال ۱۸۷۰ ایجاد شد. منطق امروز در ریاضیات، شکل کامل‌تری از منطق در فلسفه است که اساساً با نظریه مجموعه‌ها سر و کار دارد، تا حدی‌که فرگه[۶] تلاش می‌کرد ریاضیات را بر پایه‌ی اصول برآمده از منطق و نظریه مجموعه‌ها توصیف کند. فرگه، راسر[۷]، ددکیند[۸] و پئانو[۹] از پیشگامان منطق ریاضی می‌باشند که برای اطلاعات بیشتر در این‌خصوص می‌توان به منابع [۱۱] و [۲۸] اشاره کرد. کواین[۱۰] معلم منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها بود و صاحب نظر در منطق مرتبه اول بود. کانتور[۱۱] برای کار با مجموعه‌ها و به‌خصوص تعریف مفهوم بی‌نهایت از مفهوم مجموعه به‌صورت طبیعی آن، که بیان می‌کرد هر مجموعه گردایه‌ای از اشیاء مشخص است استفاده کرد [۵، ۷، ۲۵، ۲۷]. اولین دستگاه اصل موضوعی برای نظریه‌ی مجموعه‌ها توسط زرملو در سال ۱۹۰۸ وضع شد. تمام اشیاء این نظریه به‌طور شهودی «مجموعه» تصور می‌شوند؛ درحالی‌که در نظریه‌های جدید، اشیاء «رده» هستند و مجموعه عبارت از رده‌ای است که متعلق به رده‌ی دیگر است. در سال ۱۹۲۲ فرانکل دریافت که دستگاه زرملو به‌عنوان زیربنای کل ریاضیات ضعف دارد و یک سال بعد اسکولم با وضع اصل موضوعی جایگزینی [۱۲] مشکل را حل نمود و به این‌ترتیب دستگاه قدرتمند نظریه‌ی مجموعه‌های زرملو– فرانکل یا به‌طور مختصر ZF تأسیس شد. نظریه‌ی مجموعه‌های زرملو– فرانکل یک نظریه‌ی مرتبه اول است و تلاش می‌کند زوج مرتب (a,b) را طوری تعریف کند که عبارت (a,b) را با عبارت (b,a) متمایز سازد و در نهایت ریاضیدانان همراه با اصل انتخاب، بیشترین بهره را از آن ببرند [۶، ۱۲، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۹]. دیپورت[۱۳] و هالموس[۱۴] هم به قضیه‌های اصلی و پایه‌ای در نظریه‌ی مجموعه از جمله قضیه کانتور و نحوه تعریف زوج مرتب اشاره می‌کنند که با استفاده از قضیه کانتور بتوان یک رابطه ترتیبی بین اعداد کاردینال برقرار کرد [۱۵]. احساس نیاز به مفهوم زوجی که دارای ترتیب باشد، به‌طوری‌که (a,b) را از (b,a) متمایز سازد، موجب گردید تا زوج مرتب به‌گونه‌ای تعریف شود که خاصیت مهم زیر در این مفهوم برقرار باشد [۴].

$$(a,b)=(c,d) \iff a=c,\ b=d \tag{۱}$$

از اصل موضوع جفت‌سازی [۱۵] نتیجه می‌گیریم که مجموعه‌ای شامل هر دو مجموعه‌ی دلخواه داریم و می‌توان رابطه‌ای بین این دو مجموعه تعریف کرد که ترتیب قرارگرفتن اعضا در این رابطه مهم باشد [۲۰]. در زوج مرتب (a,b) به‌طور مرسوم a و b را به‌ترتیب مؤلفه‌ی (مختص) اول و مؤلفه‌ی (مختص) دوم می‌گویند. در این مقاله ابتدا تعریف زوج مرتب را از دیدگاه‌های مورس، کوراتوفسکی، وینر و هاسدورف بررسی و ملاحظه می‌کنیم که در هر چهار دیدگاه ضمن حفظ شرط اصلی تساوی دو زوج مرتب، وابسته به تعریف زوج مرتب، حاصلضرب دکارتی مرتب و نامرتب، رابطه، تابع و سایر مفاهیم مهم ریاضی تعریف

[۱۵] اصل موضوع جفت‌سازی: اگر A و B دو مجموعه باشند، مجموعه‌ای چون C شامل دو مجموعه A و B وجود دارد، یا به بیانی دیگر $\{A,B\}$ نیز یک مجموعه است.

[5] naive set theory [6] Frege [7] Russell [8] Dedekin [9] Peano [10] Willard Quine [11] Cantor [12] axiom schema of replacement
[13] Dipert [14] Holmes

می‌شوند که برای اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توان به منابع [۸]- [۱۰]، [۱۳، ۱۴، ۲۱، ۲۳، ۲۶، ۲۸] مراجعه کرد. این مقاله از ۵ بخش تشکیل شده است. در بخش ۱ به مقدمه و تاریخچه زوج مرتب اشاره می‌کنیم. در بخش ۲ به ساختار و منطق درجه اول می‌پردازیم که زبان مورد نظر در این مقاله، زبان رابطه‌ای است. در بخش ۳ به معرفی بعضی از حالت‌هایی از تعریف زوج مرتب می‌پردازیم که اتحاد ۱ و نتایج مربوطه برقرار است. هدف در بخش ۴ مطالعه‌ی تعریف‌های ممکن برای زوج مرتب است که بر اساس تعریف زوج مرتب کوراتوفسکی اتحاد ۱ و نتایج مربوطه برقرار نیست. بخش ۵ هم مربوط به نتیجه‌گیری است.

۲. زبان‌ها و ساختارهای مرتبه اول

۱.۲. تعریف زبان مرتبه‌ی اول. یک زبان مرتبه‌ی اول عبارتست از مجموعه‌ای مانند

$$\mathcal{L}=\mathcal{F}\dot{\bigcup}\mathcal{R}$$

که در آن

$$\mathcal{F}=\dot{\bigcup_{n\geqslant 0}}\mathcal{F}_n,\quad \mathcal{R}=\dot{\bigcup_{n\geqslant 1}}\mathcal{R}_n.$$

عناصر $\mathcal{F}_n$ را نماد تابعی n–موضعی و عضوهای $\mathcal{R}_n$ را نماد رابطه‌ای (محمولی) n–موضعی می‌نامیم و عضوهای $\mathcal{F}_0$ را نمادهای ثابت. اگر $\mathcal{R}=\emptyset$، زبان را جبری و اگر $\mathcal{F}=\emptyset$، زبان را رابطه‌ای می‌نامیم. برخی از مواقع از نماد زیر استفاده می‌کنیم:

$$A=(A,f^A,R^A,f\in\mathcal{F},R\in\mathcal{R}).$$

به‌عنوان مثال در مورد مجموعه‌ی اعداد حقیقی، توابع آشنا عبارت است از اعمال دوتایی جمع $+$، ضرب $\times$، عمل یکتایی $-$ و رابطه‌ی کوچکتر یا مساوی $\leqslant$، که معمولاً به خاطر متناهی بودن تعداد توابع و روابط، این ساختار را با نماد $(R,\ +,\ \times,\ -,\ \leqslant)$ نمایش می‌دهند. در حاصلضرب دکارتی مرتب و نامرتب زیر از خانواده‌ی دلخواه از مجموعه‌ها، زبان مورد نظر نظریه مجموعه‌ها، زبان رابطه‌ای $\{\leqslant\}$ است و می‌توان نماد تابعی ۲–موضعی به‌صورت $J(x,y)=\{x,\{x,y\}\}$ یا $J(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$ معرفی کنیم و آن‌را با نماد (x,y) نمایش دهیم. حال به استقرا می‌توان برای هر $n\geqslant 1$ نماد تابعی n –موضعی $J^{(n)}$ را به‌صورت $J^{(1)}(x)=x$ تعریف کرد و در نهایت

$$J^{(n+1)}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+1})=J(J^{(n)}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\ x_{n+1})$$

که در اینجا $x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+1}$ متغیرها می‌باشند. از جمله نمادهای منطقی استاندارد در زبان نظریه مجموعه‌ها عبارتند از

$$\neg,\quad \exists,\quad \neg,\quad \vee,\quad =,\quad (,).$$

لازم به توضیح است که در نظریه‌ی مجموعه‌ها، هر عضوِ یک مجموعه، مجموعه است. صورت اصل انتظام [۱۶] بیان می‌کند که اگر وارد یک مجموعه بشویم و بعد وارد عضوی از آن مجموعه و سپس وارد عضوی از آن عضو بشویم، نهایتاً به تهی می‌رسیم. اگر A یک مجموعه باشد، بنا به اصل تزویج $\{A,A\}$ نیز یک مجموعه است. بنا به اصل تصریح [۱۷] $\{x\in\{A,A\}\,|\,x=A\}$ یعنی $\{A\}$ یک مجموعه است. پس چون $\{A\}\neq\emptyset$ بنا به اصل انتظام $\exists B\ B\cap\{A\}=\emptyset$. بنابراین $A\cap\{A\}=\emptyset$ و $A\notin A$. به این‌ترتیب با توجه به اصل انتظام به‌راحتی نتیجه می‌شود که مجموعه‌ی همه مجموعه‌ها

---

[۱۶] اصل انتظام: $\forall x\quad \exists z\in x\quad z\cap x\neq\emptyset$

[۱۷] اصل تصریح بیانگر این است که اشتراک یک کلاس با یک مجموعه، یک مجموعه است و هر عبارتی که در اصل شمول توصیف می‌شود، یک کلاس است.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.137454.1571

وجود ندارد یا به قول پ. ر. هالموس «هیچ چیز شامل همه چیز نیست». به این‌ترتیب با توجه به اصل تصریح معضلاتی همچون پارادوکس راسل مرتفع می‌گردند.

قضیه ۱.۲. اگر x و y مجموعه باشند، آن گاه $\{\{x\},\{x,y\}\}$ یک مجموعه است.

اثبات. اگر x و y مجموعه باشند، در این‌صورت بنا به اصل جفت سازی $\{x,x\}$ و $\{x,y\}$ هر دو مجموعه‌اند. با استفاده از اصل گسترش $\{x\} = \{x,x\}$. بنابراین $\{x\}$ و $\{x,y\}$ هر دو مجموعه‌اند. بنا به اصل جفت سازی $\{\{x\},\{x,y\}\}$ مجموعه است. $\square$

۲.۲. تعریف حاصلضرب دکارتی دو مجموعه. حاصل‌ضرب دکارتی (مرتب) دو مجموعه به‌صورت مجموعه‌ی همه زوج مرتب‌های حاصل از دو مجموعه‌ی ناتهی تعریف می‌شود؛ به‌عبارت دیگر $A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A,\ \ b\in B\}$. لازم به یادآوری است که با کمک اصل زوج سازی، اصل اجتماع و اصل مجموعه توانی می‌توان نشان داد حاصلضرب دکارتی دو مجموعه، خود یک مجموعه است. حاصضرب دکارتی n مجموعه‌ی ناتهی، یک مجموعه‌ی ناتهی است؛ ولی این‌که حاصلضرب دکارتی خانواده‌ای دلخواه از مجموعه‌های ناتهی، ناتهی است نیاز به اصل انتخاب دارد. از جمله محورهای مختصات پرکاربرد در ریاضیات عبارتند از: دکارتی، استوانه‌ای و کروی. محورهای مختصاتی دکارتی محورهایی هستند که در آنها محورها برهم عمود و واحدها روی هر دو محور یکسان است. در صفحه‌ی شامل محورهای مختصات دکارتی در فضای اقلیدسی دو بعدی، هر زوج مرتب متناظر با یک نقطه است و بالعکس. در بیشتر موارد احتمالاً نقطه با زوج مرتب یکی گرفته می‌شود، در صورتی‌که که نقطه تعریف نشده است ولی زوج مرتب تعریف شده است. به‌عنوان مثال صفحه اقلیدسی حقیقی با $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ نمایش داده می‌شود که این صفحه از نقاطی تشکیل شده که تعریف نشده‌اند ولی اعضای $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ تعریف شده‌اند. اگر A و B دو مجموعه باشند، به هر زیرمجموعه از $A\times B$ یک رابطه‌ی ۲–موضعی از A به B گفته می‌شود. در [۲] رابطه‌ی f را یک تابع می‌خوانیم اگر xfy و xfz آنگاه $y=z$. به مجموعه‌ی مختص‌های اول تابع، دامنه‌ی تابع و به مجموعه‌ی مختص‌های دوم تابع، برد تابع گویند. در [۲] به مطالب زیر در مورد تابع اشاره شده است.

فرض کنیم $f\subseteq A\times B$ باشد، اگر دامنه تابع، مجموعه‌ی A و برد تابع، مجموعه‌ی B باشد، f را تابعی بر A بروی B گویند و اگر دامنه تابع، زیر مجموعه‌ی A و برد تابع، زیر مجموعه‌ی B باشد، f را تابعی از A به B گویند. اگر دامنه تابع، A و برد تابع، زیر مجموعه‌ی B باشد، f را تابعی بر A به B گویند. اگر دامنه تابع، زیر مجموعه‌ی A و برد تابع، مجموعه‌ی B باشد، f را تابعی از A بروی B گویند.

۳.۲. تعریف حاصلضرب دکارتی نامرتب از خانواده‌ی دلخواه از مجموعه‌ها. فرض کنیم $A=\{A_x\,|\,x\in\triangle\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد. در این‌صورت حاصلضرب دکارتی نامرتب از اعضای A که با نماد $\prod_{x\in\triangle}A_x$ نشان می‌دهیم، عبارتست از مجموعه‌ی همه‌ی توابع به فرم

$$f:\triangle\longrightarrow\cup_{x\in\triangle}A_x$$

با این شرط که به ازای $x\in\triangle$ داشته باشیم $f(x)\in A_x$.

حال که حاصلضرب دکارتی نامرتب از خانواده‌ی دلخواه از مجموعه‌ها تعریف شد، به‌راحتی می‌توان حاصلضرب دکارتی مرتب از خانواده‌ی دلخواه از مجموعه‌ها را تعریف کرد. برای این‌کار، باید مجموعه مرتب شده جزئی و کلی را یادآوری کنیم. فرض کنیم A یک مجموعه‌ی دلخواه و $\leqslant$ یک رابطه روی مجموعه‌ی A باشد. اگر A دارای خاصیت بازتابی[۱۸] ، پادتقارنی[۱۹] و تعدی[۲۰] باشد در این‌صورت گویند A یک مجموعه‌ی مرتب شده جزئی است. اگر مجموعه مرتب شده جزئی A دارای این

[18] $\forall x,\ x\in A\ x\leq x$ [19] $\forall x,y\in A, x\leq y,$ and $y\leq x\Longrightarrow x=y$ [20] $\forall x,y,z\in A, x\leq y,\ and\ y\leq z\Longrightarrow x\leq y$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.137454.1571

خاصیت باشد که به ازای هر دو عضو دلخواه a و b از A داشته باشیم $a \leqslant b$ یا $b \leqslant a$ ، در این‌صورت گوییم A یک مجموعه مرتب شده کلی است و معمولاً می‌نویسیم $(A, \leqslant)$.

۴.۲. تعریف حاصلضرب دکارتی مرتب از خانواده‌ی دلخواه از مجموعه‌ها. فرض کنیم $A = \{A_x \,|\, x \in \triangle\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها و $(\triangle, \leq)$ یک مجموعه‌ی مرتب شده‌ی کلی باشد. در این‌صورت حاصلضرب دکارتی مرتب از اعضای A که با نماد $(\prod_{x\in\triangle} A_x, \leq)$ نشان می‌دهیم، عبارتست از مجموعه‌ی همه‌ی توابع به فرم

$$f : \triangle \longrightarrow \cup_{x\in\triangle} A_x$$

با این شرط که به ازای $x \in \triangle$ داشته باشیم $f(x) \in A_x$.

۳. حالت‌های ممکن تعریف زوج مرتب

با توجه به اهمیت تعریف زوج مرتب، دانشمندان متعددی تلاش کردند که آن‌را تعریف کنند. از جمله راسر[۲۱] در [۲۸] و کواین[۲۲] در [۲۴] تعریفی از زوج مرتب را ارائه کردند که نیاز به تعریف قبلی از اعداد طبیعی داشت. مورس[۲۳] در [۲۲] زوج مرتب را به‌گونه‌ای تعریف کرد با این پیش‌بینی که کلاس و مجموعه تعریف شود، در حالی‌که مجموعه جزء مفاهیم تعریف نشده است. در اوایل توسعه نظریه‌ی مجموعه‌ها، قبل از اینکه پارادوکس‌ها مطرح شوند، فرگه و کانتور نیز زوج مرتب را تعریف کردند. در سال ۱۹۱۴، وینر اولین تعریف ساده از یک زوج مرتب (x, y) را به‌صورت $\{\{\{x\}, \emptyset\}, \{\{y\}\}\}$ ارائه کرد. حال سؤال این است که تعریف فوق با رابطه تساوی زوج مرتب‌ها سازگار می‌باشد یا نه؟ به‌عبارت دیگر آیا اتحاد ۱ برقرار است؟ با استفاده از اصل گسترش[۲۴] می‌توان قضایای زیر را ثابت کرد. لازم به یادآوری است در این بخش قضایایی را مطرح می‌کنیم که اتحاد ۱ و نتایج مربوطه برقرار است.

قضیه ۱.۳. اگر $(a, b) = \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\}$، آنگاه $(a, b) = (c, d) \iff a = c,\, b = d$

اثبات. اگر $a = c,\, b = d$، بدیهی است که مجموعه‌ی $\{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\}$، با مجموعه‌ی $\{\{\{c\}, \emptyset\}, \{\{d\}\}\}$ برابر است و بنابراین خواهیم داشت: $(a, b) = (c, d)$ حال فرض کنیم $(a, b) = (c, d)$ در این‌صورت داریم:

$$\{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\} = \{\{\{c\}, \emptyset\}, \{\{d\}\}\}.$$

از تساوی دو مجموعه فوق فقط از هر مجموعه یک مجموعه دو عضوی داریم که باید باهم مساوی باشند. به‌عبارت دیگر $\{\{a\}, \emptyset\} = \{\{c\}, \emptyset\}$ که خواهیم داشت $a = c$ و در نهایت $b = d$. □

زمان کوتاهی پس از وینر، فلیکس هاسدورف[۲۵]؛ که در توسیع نظریه‌ی مجموعه‌ها، توپولوژی، نظریه‌ی اندازه، احتمال و آنالیز تابعی نقش اساسی داشت؛ زوج مرتب را به‌صورت $(x, y) = \{\{x, \emptyset\}, \{y, \{\emptyset\}\}\}$ تعریف کرد. حال سؤالی مطرح است، که آیا تعریف مذکور با اتحاد ۱ سازگار می‌باشد؟

قضیه ۲.۳. اگر $(a, b) = \{\{a, \emptyset\}, \{b, \{\emptyset\}\}\}$، آنگاه $((a, b) = (c, d) \iff a = c,\ b = d)$.

[۲۴] اصل گسترش: $A = B \iff A \subseteq B \ \wedge\ B \subseteq A$.

[21] Rosser [22] Quine [23] Morse [25] Felix Hausdorff

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.137454.1571

اثبات. اگر $a=c,\ b=d$ بدیهی است که مجموعه‌ی $\{\{a,\emptyset\},\ \{\{b\}\}\}$ با مجموعه‌ی $\{\{c,\emptyset\},\ \{\{d\}\}\}$ برابر است و بنابراین خواهیم داشت $(a,b)=(c,d)$. فرض کنیم $(a,b)=(c,d)$، ما ادعا می‌کنیم که $a=c$ و $b=d$. برای اثبات از استدلال برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $a\neq c$. آنگاه خواهیم داشت

$$\{a,\emptyset\}\in\{\{a,\emptyset\},\ \{b,\{\emptyset\}\}\}=(a,b)=(c,d)=\{\{c,\emptyset\},\{d,\{\emptyset\}\}\},$$

و این ایجاب می‌کند که $\{a,\emptyset\}=\{c,\emptyset\}$ یا $\{a,\emptyset\}=\{d,\{\emptyset\}\}$. اگر $\{a,\emptyset\}=\{c,\emptyset\}$، بنا به اصل گسترش بایستی $a=\emptyset$ و از آنجا $\{c,\emptyset\}=\{\emptyset\}$ که نتیجه می‌گیریم $c=\emptyset=a$؛ یعنی $a=c$ که این متناقض با فرض خلف است و این حالت اتفاق نخواهد افتاد. حال اگر $\{a,\ \emptyset\}=\{d,\ \{\emptyset\}\}$، آنگاه $a=\{\emptyset\}$ و $d=\emptyset$ (زیرا داریم $\{\emptyset\}\neq\emptyset$). همچنین داریم:

$$\{c,\emptyset\}=\{b,\emptyset\},\ \ \{c,\emptyset\}\in(a,b).$$

از طرفی داریم $\{c,\emptyset\}=\{d,\ \{\emptyset\}\}$ و در نتیجه خواهیم داشت، $d=\emptyset,\ c=\{\emptyset\}$ و $c=a=\{\emptyset\}$ که یک تناقض است و بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است. مشابه استدلال بالا در مورد حالت $b\neq d$ هم به تناقض می‌رسیم. در نهایت تساوی $a=c,\ b=d$ برقرار خواهد بود. □

در [۲۲]، مورس زوج مرتب (a,b) را با فرض $s(a)=\{\emptyset\}\cup\{t\,|\,t\in a\}$ به‌صورت $(\circ\times s(a))\cup(\{۱\}\times s(b))$ تعریف کرد؛ که در آن حاصلضرب دکارتی از تعریف زوج مرتب کوراتوفسکی به‌دست می‌آید و در زیر به آن اشاره می‌کنیم. کوراتوفسکی که نقش اساسی در بسط و توسعه توپولوژی و نظریه‌ی اندازه دارد، در سال ۱۹۲۱ زوج مرتب را طوری تعریف کرد که به تساوی دلخواه و مورد نظر دو زوج مرتب منجر می‌شود. لازم به یادآوری است چندین موضوع جالب و عمیق منطقی و فلسفی در رابطه با تعریف زوج مرتب وجود دارد که برای کسب اطلاعات در این زمینه‌ها می‌توان به منابع [۱] ، [۷]، [۸] و [۱۷] رجوع کرد. خاصیت پایه‌ی تعریف زوج مرتب برقراری اتحاد ۱ است. قضیه زیر در منبع [۱] ثابت شده است.

قضیه ۳.۳. اگر $(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$، آنگاه $(a,b)=(c,d)\Longleftrightarrow(a=c,\ b=d)$.

قضیه ۴.۳. اگر $(a,b)=\{a,\{a,b\}\}$، آنگاه $(a,b)=(c,d)\Longleftrightarrow(a=c,\ b=d)$.

اثبات. برای تساوی دو زوج مرتب (a,b) و (c,d)، باید دو خانواده‌ی $\{a,\{a,b\}\}$ و $\{c,\ \{c,d\}\}$ با هم مساوی باشند. بنابراین بایستی حالت‌های

$$(۱)\quad a=c,\qquad\{a,b\}=\{c,d\}$$

یا

$$(۲)\quad a=\{c,d\},\qquad c=\{a,b\}$$

را بررسی کنیم. در حالت (۱) چون $a=c$ خواهیم داشت: $b=d$. پس اتحاد مذکور برقرار است. در حالت (۲) خواهیم داشت $c\in a\in c$ و این یک تناقض است. لذا اتحاد مورد نظر برقرار است. □

قضیه ۵.۳. اگر $(a,b)=\{\{a\},\{\{a\},b\}\}$ آنگاه $(a,b)=(c,d)\Longleftrightarrow(a=c,\ b=d)$.

اثبات. یک طرف قضیه بدیهی است. برای اثبات طرف دیگر از فرض

$$\{\{a\},\{\{a\},b\}\}=(a,b)=(c,d)=\{\{c\},\{\{c\},d\}\}$$

حالت‌های زیر را داریم:

$$(۱) \quad \{a\} = \{c\} \text{ و } \{\{a\}, b\} = \{\{c\}, d\}$$

یا

$$(۲) \quad \{a\} = \{\{c\}, d\} \text{ و } \{\{a\}, b\}\} = \{c\}$$

یا

$$(۳) \quad \{a\} = \{\{c\}, d\} \text{ و } \{\{a\}, b\}\} = \{c\}$$

که هریک از حالت‌های فوق به برقراری اتحاد ۱ می‌رسیم. □

۴. حالت‌های ناممکن تعریف زوج مرتب

در حالت‌های زیر ملاک، مطالعه‌ی تعریف‌های ممکن برای زوج مرتب است که بر اساس تعریف زوج مرتب کوراتوفسکی اتحاد ۱ و نتایج مربوطه برقرار نیست.

الف– $(a, b) = \{\{b\}, \{a, b\}\}$

*در این حالت باید تابع J را با $J(x, y) = \{\{y\}, \{x, y\}\}$ و نماد تابعی n –موضعی $J^{(n)}$ را به‌صورت $J^{(۱)}(x) = x$ تعریف کرد و در نهایت

$$.J^{(n+۱)}(x_۱, x_۲, \ldots, x_{n+۱}) = J(x_۱, (J^{(n)}(x_۲, x_۳, \ldots, x_{n+۱})).$$

با تعریف فوق در مورد حاصلضرب دکارتی خواهیم داشت:

$$A_۱ \times A_۲ \times \ldots \times A_n = (A_۱ \times (A_۲ \times \ldots \times A_{n-۱} \times A_n))$$

که در تناقض با نتایج تعریف زوج مرتب کوراتوفسکی خواهد بود؛ زیرا داریم:

$$A_۱ \times A_۲ \times \ldots \times A_n = (A_۱ \times A_۲ \times \ldots \times A_{n-۱}) \times A_n$$

ب– $(a, b) = \{\{a, b\}\}$

*در این حالت باید تابع J به‌صورت $J(x, y) = \{\{x, y\}\}$ و نماد تابعی n –موضعی $J^{(n)}$ به‌صورت $J^{(۱)}(x) = x$ تعریف شده باشند و در نهایت

$$J^{(۲)}(x_۱, x_۲) = \{\{x_۱, x_۲\}\} = J^{(۲)}(x_۲, x_۱)$$

با تعریف فوق در مورد ضرب دکارتی خاصیت جابجایی برقرار است $A_۱ \times A_۲ = A_۲ \times A_۱$، که در تناقض با نتایج تعریف زوج مرتب کوراتوفسکی است که خاصیت جابجایی نداریم و رابطه و تابع و تابع یک‌به‌یک و حد و پیوستگی و مشتق و انتگرال و دیفرانسیل و لاپلاس و سایر مطالب مربوطه معنا پیدا نمی‌کنند.

ج– $(a, b) = \{a, b\}$

* در این‌حالت نیز مشابه حالت ب باید تابع J با $J(x, y) = \{x, y\}$ و نماد تابعی n –موضعی $J^{(n)}$ به‌صورت $J^{(۱)}(x) = x$ تعریف شوند و در نهایت

$$J^{(۲)}(x_۱, x_۲) = \{x_۱, x_۲\} = \{x_۲, x_۱\} = J^{(۲)}(x_۲, x_۱)$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.137454.1571

و ضرب دکارتی خاصیت جابجایی خواهد داشت:

$$A_1 \times A_2 = A_2 \times A_1$$

که در تناقض با نتایج تعریف زوج مرتب کوراتوفسکی است و رابطه، تابع، تابع یک‌به‌یک، حد، پیوستگی، مشتق، انتگرال، دیفرانسیل، لاپلاس و سایر مطالب مربوطه معنا پیدا نمی‌کنند.

د- $(a,b)=\{a\}$ یا $(a,b)=\{b\}$

* در این‌حالت نیز مشابه حالت‌های **ب** و**ج**، ضرب دکارتی دو مجموعه خاصیت جابجایی خواهد داشت که در تناقض با نتایج تعریف زوج مرتب کوراتوفسکی است. همچنین رابطه، تابع، تابع یک‌به‌یک، حد، پیوستگی، مشتق، انتگرال، دیفرانسیل، لاپلاس و سایر مطالب مربوطه معنا پیدا نمی‌کنند و در نهایت تابع J باید به‌صورت $J(x,y)=\{x\}$ یا $J(x,y)=\{y\}$ شود.

ه- $(a,b)=\{\{a\},\{b\}\}$

* در این‌حالت نیز مشابه حالت **ب**، ضرب دکارتی دو مجموعه خاصیت جابجایی خواهد داشت که در تناقض با نتایج تعریف زوج مرتب کوراتوفسکی است.

۵. نتیجه

با توجه به‌بررسی حالت‌های ممکن تعریف زوج مرتب بالا، نتیجه می‌گیریم که تعریف زوج مرتب از نظر کوارتوفسکی با پیدا کردن مختصات در فضاهای اقلیدسی و سایر مختصات فضایی تطابق دارد؛ به‌خصوص در فضای معمولی سه بعدی فیزیکی طبق قراردادهای دستگاه‌های مختصات جغرافیایی ابتدا نقطه را رها می‌کنیم، اندازه سقوط بر صفحه xoy را ارتفاع یا z می‌نامیم، سپس در صفحه مختصات دو بعدی طول و عرض اندازه‌گیری می‌شوند و حالت‌های دیگر با واقعیت زندگی تطابق ندارند؛ به‌عبارتی حاصلضرب دکارتی خاصیت شرکت‌پذیری ندارد زیرا داریم $((x,y),z)\neq(x,(y,z))$.

مراجع

[۱] ج. بت داود، مبانی ریاضیات، مترجم: محمد مهدی ابراهیمی، ۱۸، انتشارات پیام نور، ۱۳۸۷.

[۲] غ. ح. مصاحب، آنالیز ریاضی، ۶، انتشارات امیر کبیر، ۱۳۷۰.

[۳] س. م. ا. خاتمی، در مورد اصل انتخاب، ریاضی و جامعه، ۷ شماره ۳ (۱۴۰۱) ۱۰۳–۱۲۵.

[۴] و. سرپینسکی، نظریه مجموعه‌ها، مترجم: پرویز شهریاری، انتشارات خوارزمی، ۱۳۵۷.

[۵] ک. کوراتوفسکی و ر. انگلکینگ، مقدمه‌ای بر تئوری مجموعه‌ها و توپولوژی، مترجمان: مجید اشرفی، سینا ملوانی، محمدعلی غیرتمند، انتشارات شباهنگ، ۱۳۹۸.

[۶] ا. استیوارت و د. تال، مبانی ریاضیات، مترجم: محمد مهدی ابراهیمی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۹۵.

[7] P. R. Aczel, *Generalised set theory, logic, language and computation*, **1** (Moraga, CA, 1994), CSLI Lecture Notes, CSLI Publ., Stanford, CA, 1996 1–17.

[8] R. R. Dipert, Set-theoretical representations of ordered pairs and their adequacy for the logic of relations, *Canadian Journal of Philosophy*, **12** no. 2 (1982) pp. 22.

[9] N. Delfan, A. Pishkoo, M. Azhini and M. Darus, Using fractal calculus to express electric potential and electric field in terms of staircase and characteristic functions, *Eur. J. Pure Appl. Math.*, **13** no. 1 (2022) 19–32.

[10] K. Falconer, *Techniques in fractal geometry*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1997.

[11] G. Frege, Grundgesetze der arithmetik, *Jena: Verlag Hermann Pohle*, 1893.

[12] T, George, *Lectures in logic and set theory*, **2**, Set Theory, Cambridge Univ. Press. Proposition, 2003.

[13] C. P. Haynes and A. D. Roberts, Generalization of the fractal Einstein law relating conduction and diffusion on networks, *Phys. Rev. Lett.*, **103** (2009).

[14] P. R. Halmos, *Natural theory of collections*, translation: Abdolhamid Dadaleh, Academic Publishing Center, 1980.

[15] M. R. Holmes, *On ordered Pairs*, math. boisestate, Princeton University Press, 1988.

[16] J. Ferreiros, *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics*, Birkhäuser Basel, 1999 p. 440.

[17] K. Devlin, *Sets, functions and logic, an Introduction to abstract mathematics*, (3rd ed.), Chapman & Hall/CRC Mathematics, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.

[18] A. Kanamori, The mathematical import of Zermelo's Well-Ordering theorem, *Bull. Symbolic Logic*, **3** (1997) 281–311.

[19] A. Kanamori, The empty set, the singleton, and the ordered pair, *Bull. Symbolic Logic*, **9** (2003) 273–298.

[20] S.-Y. T. Lin, *Set theory and its applications*, University Publishing Center, 1981.

[21] J. Madhusudana Rao, Products of sets: Ordered and unordered, *Resonance*, **21** (2016) 557–564.

[22] A. P. Morse, *A theory of sets* Pure and Applied Mathematics, **XVIII**, Academic Press, New York-London, 1965.

[23] B. Oyer, *A history of mathematics (2nd ed.)*, New York: Wiley, 1991.

[24] W. V. Quine, *The time of my life: an autobiography*, CAMBRIDGE, MA, 1985 p. 499.

[25] M. R. Holmes, *Elementary set theory with a universal set*, Université Catholique de Louvain, Département de Philosophie, Louvain-la-Neuve, 1998.

[26] D. Scott and D. Mccarty, Reconsidering ordered pairs, *Bull. Symbolic Logic*, **14** (2008) no. 3 379–397.

[27] S. Satin and A. D. Gangal, Langevin equation on fractal curves, *Fractals*, **24** (2016) 7 pp.

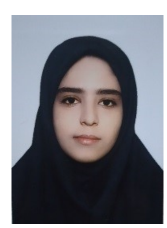
[28] J. B. Rosser, *Logic for mathematicians*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1953.

[29] Wikipedia, Zermelo–Fraenkel set theory, (2021).

علی ملخاصی
گروه ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران.
molkhasi@cfu.ac.ir

دکتر علی ملخاصی در سال ۱۳۵۱ در شهرستان اهر از توابع استان آذربایجان‌شرقی متولد شدند. ایشان مدرک کارشناسی را در گرایش دبیری ریاضی در سال ۱۳۷۶ و مدرک کارشناسی ارشد را در شاخه جبر از دانشگاه تبریز اخذ کرده‌اند. در بهمن سال ۱۳۹۴ از دانشگاه تبریز درگرایش منطق از رساله دکترای خود دفاع کرده‌اند و در حال حاضر عضو هیئت علمی رسمی گروه ریاضی دانشگاه فرهنگیان با رتبه دانشیار می‌باشند. حوزه تحقیق و پژوهش ایشان شامل لاتیس، جبر و منطق می‌باشند.

مهسا عزتی
گروه ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران.
mahsaezati۳۱۳@gmail.com



مهسا عزتی متولد ۱۳۸۲ می‌باشند. ایشان از طریق آزمون سراسری در سال ۱۴۰۰ وارد مقطع کارشناسی رشته آموزش ریاضی دانشگاه فرهنگیان شدند و هم اکنون مشغول به تحصیل در پردیس فاطمه‌الزهرا(س) تبریز می‌باشند.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.137454.1571